**Метод экспертных оценок**

**Методика Назарова**

Если имеется *универсальное множество* U, элементы которого имеют неоднозначную составляющую, можно построить нечеткое *подмножество* A *множества* U и рассмотреть его характеристическую функцию \mu A(u0). Если \mu A(u0) близко к значению 1 или 0, то вклад элемента u0 в нечеткость *множества* A мал. И наоборот, если \mu A(u0) близко к значению 0,5 (значительно отличается как от 1, так и от 0), то его вклад в нечеткость A будет значителен. Таким образом, вклад в нечеткость каждого элемента *множества* определяется близостью или отдаленностью значения функции принадлежности на этом элементе к числам 1 и 0, а *мера* нечеткости всего *множества* определяется как сумма вкладов каждого его элемента. Чтобы сравнивать нечеткие *множества*, имеющие различные носители, надо их нормировать. Представляя имеющиеся данные в виде нормированных нечетких множеств, можно анализировать их с использованием индексов нечеткости. Для вычисления индекса нечеткости IA, надо построить ближайшее к нечеткому множество A0 с функцией принадлежности \mu A(u0)  и рассчитать нормированное *расстояние* *по* Хэммингу \rho (\mu A \mu A0) .

Таким образом, чтобы ответить на вопрос: "Какое из двух множеств "более нечетко"?", надо вычислить и сравнить индексы нечеткости этих множеств. "Более нечетким" является то множество, которое имеет больший *индекс* нечеткости.

Рассмотрим предложенную методику на примере задачи.

**Задача 6.1**

Пусть имеются данные экспертных оценок *по* ряду вопросов. Были поставлены 10 вопросов, 30 экспертов давали оценки *по* 10- бальной системе. Требуется обработать результаты анкетирования на предмет согласованности оценок. *По* каким вопросам были даны наиболее согласованные оценки. С другой стороны, какие эксперты были более определенны в своих оценках. Для решения используем методику Назарова.

**Постановка задачи**

Неоднозначность оценок вызвана с одной стороны, может быть, нечеткой постановкой вопросов, с другой, стороны, у каждого эксперта свое видение проблемы. Учитывая неоднозначность оценок экспертов, будем рассматривать *массив* данных как множество U, для которого построим нечеткое *подмножество* A с характеристической функцией \mu_A. Проведем *анализ* нечеткого *множества* A *по* методике Назарова. Для этого рассчитаем индексы нечеткости множеств оценок экспертов и сравним их. При этом, задача распадается на две:

**Задача 6.1.1**

Определить индексы нечеткости множеств оценок всех экспертов *по* каждому вопросу и, тем самым, выявить самые неоднозначные вопросы, при ответе на которые мнения экспертов максимально расходились.

**Задача 6.1.2**

Определить индексы нечеткости множеств оценок *по* всем вопросам каждого эксперта и выявить, какой эксперт давал наиболее неоднозначные ответы,

**Решение задачи 6.1.1.**

Представим решение в системе MathCad. Используем матричное *представление данных*.

1. Представляем множество оценок A в виде матрицы X. Имеем массив оценок по 10- бальной системе: по 10 вопросам (столбцы) 30 экспертов (строки).

Оценки 30 экспертов: i:=1..30, \; j:=1..10

X=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 6 & 7 & 8 & 7 & 9 & 7 & 9 & 7 & 6 & 7 \\
\hline 2 & 10 & 6 & 6 & 8 & 8 & 7 & 8 & 6 & 9 & 8 \\
\hline 3 & 10 & 10 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 & 8 & 7 & 9\\
\hline 4 & 8 & 9 & 6 & 7 8 & 9 & 8 & 9 & 9 & 8 & 9 \\
\hline 5 & 8 & 9 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9\\
\hline 6 & 7 & 7 & 9 & 8 & 10 & 7 & 9 & 7 & 9 & 7\\
\hline 7 & 9 & 7 & 9 & 9 & 6 & 9 & 8 & 8 & 10 & 8\\
\hline 8 & 8 & 9 & 8 & 10 & 9 & 7 & 9 & 8 & 6 & 8\\
\hline 9 & 8 & 9 & 9 & 9 & 6 & 7 & 7 & 7 & 9 & 8\\
\hline 10 & 7 & 6 & 9 & 9 & 8& 6 & 9 & 8 & 8 & 9\\
\hline 11 & 8 & 8 & 9 & 8 & 9 & 7 & 7 & 8 & 6 & 6\\
\hline 12 & 10 & 10 & 7 & 8 & 9 & 8 & 8 & 9 & 8 & 8\\
\hline 13 & 7 & 8 & 7 & 8 & 8 & 8 & 9 & 8 & 9 & 8\\
\hline 14 & 10 & 9 & 9 & 7 & 7 & 6 & 9 & 7 & 6 & 9\\
\hline 15 & 8 & 8 & 8 & 7 & 9 & 9 & 9 & 7 & 7 & 9\\
\hline 16 & 8 & 6 & 9 & 6 & 7 & 10 & 9 & 8 & 8 & 8 \\ \hline
\end{array}

1. Построим функцию принадлежности \mu_A. нечеткого множества оценок A при ответах экспертов на каждый вопрос следующим образом:
   * Подсчитаем частоту различных оценок при ответе на каждый вопрос:

k:=1..10

Z_{j,k}:=\sum_{i=1}^{30}[[(X^{\{j\}}_i)]=k]

Матрица частоты оценок Z:

Z^T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 6 & 2 & 6 & 4 & 7 & 3 & 4 & 1 & 4 & 6 & 4\\
\hline 7 & 7 & 5 & 8 & 8 & 6 & 10 & 4 & 10 & 9 & 9\\
\hline 8 & 11 & 9 & 8 & 6 & 9 & 4 & 8 & 9 & 7 & 10\\
\hline 9 & 3 & 6 & 9 & 5 & 9 & 10 & 13 & 6 & 6 & 7\\
\hline 10 & 7 & 4 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0\\ \hline
\end{array}

* + Подсчитаем доли различных оценок при ответе на каждый вопрос. Таким образом, мы выявим степени принадлежности каждой оценки к множеству оценок по рассматриваемому вопросу. Для этого значения каждой ячейки предыдущей таблицы разделим на 30 – по количеству экспертов (Рис.6.14).

G:=\frac{1}{30}\cdot Z^T

Нечеткое множество экспертных оценок G:

G=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 6 & 0.067 & 0.2 & 0.133 & 0.233 & 0.1 & 0.133 & 0.033 & 0.133 & 0.2 & 0.133\\
\hline 7 & 0.233 & 0.167 & 0.267 & 0.267 & 0.2 & 0.333 & 0.133 & 0.333 & 0.3 & 0.3\\
\hline 8 & 0.367 & 0.3 & 0.267 & 0.2 & 0.3 & 0.133 & 0.267 & 0.3 & 0.233 & 0.333\\
\hline 9 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.167 & 0.3 & 0.333 & 0.433 & 0.2 & 0.2 & 0.233\\
\hline 10 & 0.233 & 0.133 & 0.033 & 0.133 & 0.1 & 0.067 & 0.133 & 0.033 & 0.067 & 0\\ \hline
\end{array}

* + Нормируем значения предыдущей таблицы, разделим их на максимальное значение по каждому столбцу. При этом максимальное значение степени принадлежности каждой оценки нечеткому множеству оценок при ответе экспертов на каждый вопрос станет равным единице, и мы получим значения функции принадлежности оценок.

H_j:=\max (G{\{j\}})

H^T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0.367 & 0.3 & 0.3 & 0.267 & 0.3 & 0.333 & 0.433 & 0.333 & 0.3 & 0.333 \\ \hline
\end{array}

L_{k,j}:=\frac{G_{k,j}}{(H^T)_{1,j}}

Нормированное нечеткое множество экспертных оценок L:

L=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 6 & 0.182 & 0.667 & 0.444 & 0.875 & 0.333 & 0.4 & 0.077 & 0.4 & 0.667 & 0.4\\
\hline 7 & 0.636 & 0.556 & 0.889 & 1 & 0.667 & 1 & 0.308 & 1 & 1 & 0.9\\
\hline 8 & 1 & 1 & 0.889 & 0.75 & 1 & 0.4 & 0.615 & 0.9 & 0.778 & 1\\
\hline 9 & 0.273 & 0.667 & 1 & 0.625 & 1 & 1 & 1 & 0.6 & 0.667 & 0.7\\
\hline 10 & 0.636 & 0.444 & 0.111 & 0.5 & 0.333 & 0.2 & 0.308 & 0.1 & 0.222 & 0\\ \hline
\end{array}

1. Нами получено нечеткое множество оценок экспертов по каждому вопросу L=\mu_A Построим четкое множество, ближайшее к рассматриваемому нечеткому множеству - \mu_{A_0} = L0. Применим условную функцию if().

L0_{k,j}:=if(L_{k,j}>0.5,1,0)

Множество L0, ближайшее к рассматриваемому нечеткому множеству:

L0=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline 6 &  0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\hline 7 &  1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
\hline 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\hline 9 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
\hline 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
\end{array}

1. Рассчитаем индекс нечеткости по линейной метрике (расстояние по Хэммингу) по формуле : I_A^L=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_{A_0}(x_i)|.

Для этого:

* + Вычислим модули отклонений элементов нечеткого множества оценок от ближайшего к нему четкого множества: L1=|L-L0|
  + Найдем суммы по каждому столбцу: L2_j=\sum_{k=1}^{10}L1_{k,j}
  + Транспонируем и рассчитаем индекс нечеткости L3_j=\frac{2}{10}L2^T

L1_{k,j}:=|L_{k,j}-L0_{k,j}| - отклонения – расстрояния по Хэмингу

L1=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0  \\
\hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0  \\
\hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0  \\
\hline 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline 6 &  0.182 & 0.333 & 0.444 & 0.215 & 0.333 & 0.4 & 0.077 & 0.4 & 0.333 \\
\hline 7 &  0.364 & 0.444 & 0.111 & 0 & 0.333 & 0 & 0.308 & 0 & 0\\
\hline 8 & 0 & 0 & 0.111 & 0.25 & 0 & 0.4 & 0.385 & 0.1 & 0.222\\
\hline 9 & 0.273 & 0.333 & 0 & 0.375 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.333\\
\hline 10 & 0.364 & 0.444 & 0.111 & 0.5 & 0.333 & 0.2 & 0.308 & 0.1 & ...\\ \hline
\end{array}

L2_j:=\sum_{k=1}^{10}L1_{k,j} - сумма по каждому столбцу

L2^T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline 1 & 1.182 & 1.556 & 0.778 & 1.25 & 1 & 1 & 1.077 & 1 & ... \\ \hline
\end{array}

L3:=\frac{2}{10}\cdot L2^T - индексы нечетности

L3=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0.236 & 0.311 & 0.156 & 0.25 & 0.2 & 0.2 & 0.215 & 0.2 & 0.222 & 0.16 \\ \hline
\end{array}

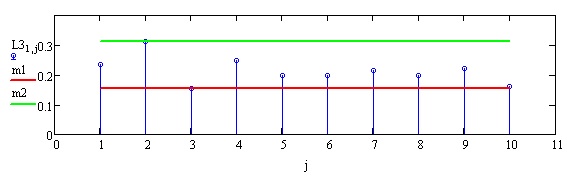
1. **Результат.** Построим график и проведем анализ. Для этого сравним индексы нечеткости. Найдем максимальное и минимальное значение индексов нечеткости. Как видно, 2 вопрос вызвал максимальное расхождение в оценках. Возможно, вопрос был поставлен некорректно или невнятно. На 3 вопрос даны наиболее определенные ответы. При этом, следует заметить, что в общем уровень несогласованности для всех вопросов близок.

Анализы ответов на вопросы по индексам нечеткости:

L3=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
\hline 1 & 0.236 & 0.311 & 0.156 & 0.25 & 0.2 & 0.2 & 0.215 & 0.2 & 0.222 & 0.16 \\ \hline
\end{array}

\min(L3)=0.156,\; \max(L3)=0.311, \; m1:=\min(L3), \; m2:=\max(L3)

По 2 вопросу наибольшее расхождение, согласованные ответы по 3 вопросу



**Рис. 6.13.**Индексы нечеткости каждой из 10 оценок всех экспертов

**Решение Задачи 6.1.2**

Для исследования нечеткости ответов *по* всем вопросам каждого эксперта имеем тот же *массив* оценок, но *по* 30 экспертам (столбцы), которые давали ответы на 10 вопросов (строки) *по* 10- бальной системе.

*Матрица* данных X1 представляет транспонированную матрицу данных X: 30 экспертов отвечают на 10 вопросов

X1:=X^T

(X1)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
\hline 1 & 6 & 10 & 10 & 8 & 8 & 7 & 9 & 8 & 8 & 7 & 8 & 10 & 7 & 10 &8  \\
\hline 2 & 7 & 6 & 10 & 9 & 9 & 7 & 7 & 9 & 9 & 6 & 8 & 10 & 8 & 9 & 8  \\
\hline 3 & 8 & 6 & 8 & 6 & 8 & 9 & 9  & 8 & 9 & 9 & 9 & 7 & 7 & 9 & 8 \\
\hline 4 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 8 & 9 & 10 & 9 & 7 & 8 &  8 & 8 & 7 & 7  \\
\hline 5 & 9& 8 & 9 & 8 & 8 & 10 & 6 & 9 & 6 & 8 & 9  & 9 & 8 & 7 & 9\\
\hline 6 &  7 & 7 & 9 & 9 & 8 & 7 & 9 & 7 & 7 & 6 & 7 & 8 & 7 & 6 & 9 \\
\hline 7 &  9 & 8 & 10 & 8 & 9 & 9 & 8 & 9 & 7 & 9 & 7 & 8 & 9 & 9 & 9\\
\hline 8 & 7 & 6 & 8 & 9 & 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 & 7 & 7\\
\hline 9 & 6 & 9 & 7 & 8 & 8 & 9 & 10 & 6 & 9 & 8 & 6 & 8 & 9 & 6 & 7\\
\hline 10 & 7 & 8 & 9 & 9 & 9 & 7 & 8 & 8 & 8 & 9 & 6 & 8 & 8 & 9 & 9\\ \hline
\end{array}

**Решение Задачи 6.2.2**

Для решения надо выполнить те же действия:

1. Используя матрицу данных X1, построить функцию принадлежности \mu_A. нечеткого множества A оценок каждого эксперта по всем вопросами.
2. Оценить ее по индексам нечеткости

*Алгоритм* решения тот же самый. Если транспонировать матрицу X1, можно использовать все *операторы*, но с учетом другого размера матрицы: i=10 и j=30.

Результат решения задачи 6.2.2 .

Получены следующие индексы нечеткости.

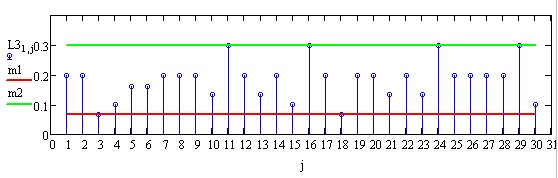
*Анализ* экспертов *по* индексам нечеткости

L3=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} 
\hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\
\hline 1 & 0.067 & 0.1 & 0.16 & 0.16 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.133 & 0.3 & 0.2 & ... \\ \hline
\end{array}

\min(L3)=0.067,\; \max(L3)=0.3, \; m1:=\min(L3), \; m2:=\max(L3)

Эксперты 11, 16, 24, 29 дали наиболее размытые оценки.

Эксперты 3 и 18 отвечали наиболее согласованно и определенно.



**Рис. 6.14.**Индексы нечеткости оценок каждого эксперта по всем вопросам

Как видно, 4 эксперта (11,16,24,29) выделяются наименьшей определенностью своих оценок, два эксперта (3 и 18), напротив, дали согласованные оценки. На этих экспертов можно обратить внимание. На общем уровне согласованность близка.